Geometria

1. feladat.

Egy egyenlőszárú háromszög egyik szögéről tudjuk, hogy szinusza $\frac{1}{2}$, koszinusza pedig $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Mekkorák a háromszög szögei?

Megoldás:

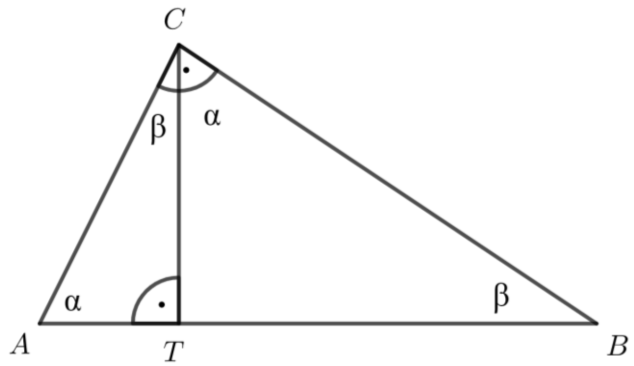
Két olyan 180°-nál kisebb szög van, amelynek a szinusza 0,5: a 30° és a 150°. Ezek közül a 150° koszinusza negatív, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Tehát a kérdéses szög 150°-os. Ez nem lehet az adott háromszög alapon fekvő szöge, tehát a szárszöge. Így a háromszög szögei: 150°, 15°, 15°.

2. feladat.
Flóra szerint, ha két háromszögről tudjuk, hogy szögeik megegyeznek, és van egy-egy egyenlő hosszúságú oldaluk, akkor a kétháromszög egybevágó. Igaza van-e Flórának? Válaszát indokolja!

Megoldás:

Nincs igaza Flórának, mutatunk olyan háromszögeket, amelyek szögei megegyeznek, van egy-egy egyenlő hosszúságú oldaluk, de nem egybevágók.
A következő ábrán látható *ABC* háromszög *C*-nél lévő szöge derékszög, az *A* csúcsnál lévő szög nagyságát jelölje α, a *B*-nél lévőét β. Behúztuk a háromszög *AB* oldalhoz tartozó magasságát, ami az eredeti háromszöget két derékszögű háromszögre osztja.



Miután az *ABC* háromszögben $\alpha + \beta = 90°$, így az *ATC* háromszög *C* csúcsnál lévő szöge is β nagyságú, és a *BCT* háromszög *C*-nél lévő szöge is α nagyságú.
Így az ábrán szereplő három derékszögű háromszög (*ABC*, *ATC* és *BCT*) szögei egyenlők (mind hasonlók), és bármelyik kettőt tekintjük, azoknak lesz közös, így ugyanolyan hosszú oldala is. Ugyanakkor ezek a háromszögek nem egybevágók.

3. feladat.
Egy háromszögről tudjuk, hogy két magassága egyenlő hosszú. Bizonyítsa be, hogy a háromszög egyenlőszárú!

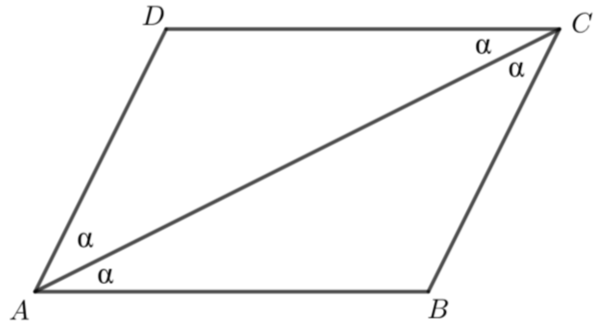
Megoldás:

Az *ABC* háromszögben a szokásos jelöléseket alkalmazva jelölje *a* és *b* a háromszög két oldalának hosszát. A feladat feltétele szerint az ezekhez tartozó magasságok hosszára $m_a = m_b$ teljesül. Az *ABC* háromszög területét kétféleképpen felírva:
$\frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2}$. A kapott egyenlőség mindkét oldalát 2-vel szorozva, és az egyenlő nagyságú magassággal elosztva kapjuk, hogy $a = b$, ami éppen a bizonyítandó állítás.

4. feladat.
Egy paralelogramma egyik átlója szögfelező egyben. Mutassa meg, hogy ez a paralelogramma egy rombusz!

Megoldás:

A paralelogramma szemközti szögei egyenlők. Az ábrán látható *ABCD* paralelogrammában a feladat szövege értelmében az *AC* átló felezi a paralelogramma A-nál és C-nél lévő szögeit.



Ekkor az ABC és az ACD háromszögek két-két szöge egyenlő, vagyis az ezekkel szemben lévő oldalak hosszára: $AB = BC$ és $AD = DC$. Mivel a paralelogramma szemben lévő oldalai egyenlő hosszúak, így ebben az esetben minden oldala egyenlő hosszú, azaz rombusz.

5. feladat.
Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik az $A(–1; 5)$ és $B(8; –13)$ pontokra!

Megoldás:

A feladatot sokféleképpen meg lehet oldani, mi most négy lehetőséget mutatunk.

Első: Az egyenes egyenletét $y = mx + b$ alakban keresve megoldandó a következő egyenletrendszer: $\left.\begin{aligned} 5 &= m\cdot(-1)+b \\ -13 &= m\cdot 8+b \end{aligned}\right\}$.

A megoldás: $y = –2x + 3$.

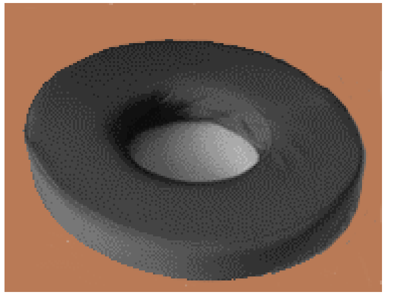
Második: az egyenes meredeksége a megadott pontok második és első koordinátáinak különbségével egyenlő: $m=\dfrac{-13-5}{8-(-1)}=-2$.

Az $y=-2x+b$ egyenletbe például A koordinátáit helyettesítve $b = 3$.
Harmadik: természetesen továbbra is használható az érettségi vizsgán az egyenes irány-, illetve normálvektoros alakja. A kérdéses egyenes egy irányvektora $\overrightarrow{AB}=(8-(-1);-13-5)=(9;-18)$, az egyenes egyenlete $18x + 9y = 27$, azaz $y = –2x + 3$.
Negyedik: a két adott pontra illeszkedő egyenes képletébe helyettesítve adódik a feladat megoldása.

Végül a 18. feladat a 2023. őszi középszintű feladatsorból megmutatja, hogy a körgyűrű területének kiszámítása tulajdonképpen eddig is részét képezte a követelményeknek.

6. feladat.

Egy párnákat gyártó cég a képen látható ülőpárnát szivacsból készíti, majd szövettel befedi. A szivacsból először egy 42 cm átmérőjű, 7 cm magasságú körhengert vágnak ki. Ezután a henger közepéből kivágnak egy 18 cm átmérőjű kisebb körhengert. (A két henger alapkörének középpontja egybeesik.)



a) Számítsa ki a párna szivacsos részének térfogatát!

b) Mennyi szövetre van szükség 30 párna befedéséhez? Válaszát négyzetméterben, egészre kerekítve adja meg! (A veszteségektől itt eltekintünk.)

Megoldás:

18. a)		
A nagy henger alapkörének sugara 21 cm, a kis henger alapkörének sugara 9 cm (a test magassága $m = 7$ cm).	1 pont	
A nagy henger térfogata: $21^2 \cdot \pi \cdot 7 \approx 9698$ cm^3.	1 pont	
A kis henger térfogata: $9^2 \cdot \pi \cdot 7 \approx 1781$ cm^3.	1 pont	
A szivacsos rész térfogata a két henger térfogatának különbsége, azaz 7917 cm^3.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. b)		
Egy párna felszíne két körgyűrűből, valamint a belső, illetve a külső hengerpalástból áll.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A körgyűrű területe a nagy és a kisebb kör területének különbsége: $21^2 \cdot \pi - 9^2 \cdot \pi \approx 1131$ cm^2.	1 pont*	
A belső hengerpalást területe: $2 \cdot 9 \cdot \pi \cdot 7 \approx 396$ cm^2.	1 pont*	
A külső hengerpalást területe: $2 \cdot 21 \cdot \pi \cdot 7 \approx 924$ cm^2.	1 pont*	
Egy párna felszíne: $2 \cdot 1131 + 396 + 924 = 3582$ cm^2.	1 pont*	
30 db párna felszíne: $30 \cdot 3582 = 107\,460$ cm^2 =	1 pont	
= 10,746 m^2.	1 pont	
Tehát (a kért kerekítéssel) 11 m^2 szövetre van szükség.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**8 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 5 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A párna felszínét megkapjuk, ha a nagy henger felszínéből kivonjuk a kis henger felszínét, és a különbséghez hozzáadjuk a belső hengerpalást területének kétszeresét.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A nagy henger felszíne: $2 \cdot 21^2 \cdot \pi + 2 \cdot 21 \cdot \pi \cdot 7 \approx 3695$ cm^2.	1 pont	
A kis henger felszíne: $2 \cdot 9^2 \cdot \pi + 2 \cdot 9 \cdot \pi \cdot 7 \approx 905$ cm^2.	1 pont	
A belső hengerpalást területe: $2 \cdot 9 \cdot \pi \cdot 7 \approx 396$ cm^2.	1 pont	
Egy párna felszíne: $3695 - 905 + 2 \cdot 396 = 3582$ cm^2.	1 pont	