Az eredeti feladat

Let $a_0=1$, $a_1=2$, and $a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}$ for $n\geq 2$. Find an odd prime factor of a_{2015}.

Még egy megoldó:

```
RSolve[{a[0] == 1, a[1] == 2, a[n] == 4 a[n - 1] - a[n - 2]}, a[n], n]
```

$$\left\{\left\{a[n] \to \frac{1}{2}\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^n+\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)\right\}\right\}$$

(Korlátai?) Ez persze megy kézzel is. Hogyan?

$$a[n\_] := \left(2-\sqrt{3}\right)^n+\left(2+\sqrt{3}\right)^n$$

Próbálkozunk.

```
TableForm[FactorInteger@Simplify[a /@ Range[10]], TableHeadings → {Range[10], None}]
```

1	2 2			
2	2 1	7 1		
3	2 2	13 1		
4	2 1	97 1		
5	2 2	181 1		
6	2 1	7 1	193 1	
7	2 2	2521 1		
8	2 1	31 1	607 1	
9	2 2	13 1	37 1	73 1
10	2 1	7 1	37 441 1	

```
Simplify[a[5]]
```

724

```
FullSimplify[a[10]]
```

524 174

```
Expand[a[100]]
```

419 572 683 819 867 866 812 742 106 539 378 415 926 305 831 840 115 894 452

```
ea = Expand[a[2015]]
```

```
2 980 631 450 957 835 752 118 678 418 098 630 639 983 565 567 189 568 500 313 759 966 620 828 721 470 ⋱
  460 401 931 589 471 235 521 795 522 443 944 715 485 309 651 730 753 143 519 100 817 905 043 884 785 ⋱
  403 496 760 861 477 826 589 807 520 720 468 800 995 516 186 152 118 833 729 034 703 319 387 393 661 ⋱
  587 265 656 728 363 111 589 754 358 336 421 057 327 762 128 357 518 957 379 398 849 443 775 304 986 ⋱
  679 121 611 269 506 362 988 156 540 828 455 590 288 837 176 555 353 474 877 368 676 490 286 928 683 ⋱
  131 261 338 538 285 327 469 888 242 335 427 444 540 772 106 196 378 550 332 429 330 005 338 691 755 ⋱
  036 478 764 092 734 382 948 254 041 569 661 046 224 424 117 553 587 357 146 747 231 089 106 673 309 ⋱
  007 262 220 298 718 854 799 314 124 963 460 450 933 203 802 797 198 336 066 350 160 898 884 513 004 ⋱
  730 273 064 251 985 650 859 608 026 978 106 197 167 899 623 522 588 092 786 938 798 878 679 061 165 ⋱
  600 206 076 386 684 841 476 055 630 274 732 412 178 530 813 768 610 746 024 301 643 442 083 413 197 ⋱
  928 612 621 626 234 224 801 379 815 913 464 353 002 593 191 203 664 348 715 516 896 409 696 582 219 ⋱
  516 109 170 598 416 508 830 408 507 219 153 033 934 991 153 919 675 837 083 314 362 752 939 796 900 ⋱
  627 347 653 657 521 619 465 498 292 251 307 528 182 890 551 361 494 016 383 011 165 294 610 887 967 ⋱
  802 011 952 924 346 564 697 886 675 610 012 895 682 397 444 847 184 636 928 859 972 628 428 768 620 ⋱
  558 682 358 512 712 222 509 832 662 287 423 288 718 469 635 241 972 473 043 579 075 223 217 940 648 ⋱
  469 676 778 924 789 259 122 145 924
```

```
Length[IntegerDigits[ea]]
```

```
1153
```

$$e[k\_] := ea / 2^k$$

```
TableForm[IntegerQ[e[#]] & /@ Range[5], TableHeadings → {Range[5], None}]
```

1	True
2	True
3	False
4	False
5	False

Tehát a szám 4-gyel osztható, 8-cal nem. Egy páratlan osztója: a[2014]/4. De az nem prím:

```
PrimeQ[Expand[a[2015] / 4]]
```

```
False
```

```
IntegerQ[Expand[a[2015] / 4]]
```

```
True
```

```
Needs["PrimalityProving`"]
```

```
ProvablePrimeQ[Expand[a[2015] / 4]]
```

```
False
```

Keressük meg két osztóját.

```
FactorInteger[Expand[a[2015] / 4], 2]
```

```
{{67 513, 1},
 {11 037 250 051 685 733 681 360 176 625 607 774 206 388 271 766 880 336 010 523 010 259 582 705 262
   210 464 658 405 008 928 782 315 241 221 853 364 224 243 144 474 881 701 092 823 237 072 508 420
   173 838 384 817 593 876 282 444 084 130 170 191 180 961 427 859 027 713 621 205 282 814 803 517
   053 729 139 525 964 098 500 892 833 934 776 851 630 134 408 661 154 623 396 675 297 273 854 107
   519 201 135 287 570 992 295 074 675 851 273 667 815 192 835 417 952 235 778 869 823 126 202 985
   634 212 251 450 398 927 841 077 045 477 639 380 149 905 704 928 845 336 350 429 533 491 884 275
   729 600 244 910 949 576 512 963 296 301 210 074 164 435 151 636 207 272 023 255 215 860 602 243
   815 069 805 404 539 397 260 554 494 024 479 429 349 900 441 859 210 301 908 273 976 133 475 028
   276 281 420 470 497 846 759 160 199 787 686 267 776 764 695 717 961 644 817 283 959 754 504 771
   629 511 305 003 476 658 862 223 444 374 439 279 793 094 816 835 482 167 414 914 209 776 379 414
   959 380 956 350 264 554 389 833 858 656 586 926 301 698 318 193 538 206 774 671 042 439 984 125
   987 601 144 774 767 514 761 637 375 698 826 581 951 515 257 863 333 100 323 297 806 174 492 079
   270 488 349 191 404 186 283 985 132 270 069 840 724 555 469 530 022 438 143 388 281 706 143 735
   957 854 603 415 246 013 297 480 356 726 152 326 099 425 340 130 509 481 746 840 929 434 368 243
   507 481 512 615 522 879 434 067 735 001 512 407 864 487 427 170 909 723 728 106 104 871 144 399
   683 352 533 843 982 795 804 041 605 242 972 550 538 195 045 656 676 413 893 580 714 537, 1}}
```

```
fi = FactorInteger[Expand[a[2015] / 4], 2]
```


```
{{67 513, 1},
 {11 037 250 051 685 733 681 360 176 625 607 774 206 388 271 766 880 336 010 523 010 259 582 705 262
   210 464 658 405 008 928 782 315 241 221 853 364 224 243 144 474 881 701 092 823 237 072 508 420
   173 838 384 817 593 876 282 444 084 130 170 191 180 961 427 859 027 713 621 205 282 814 803 517
   053 729 139 525 964 098 500 892 833 934 776 851 630 134 408 661 154 623 396 675 297 273 854 107
   519 201 135 287 570 992 295 074 675 851 273 667 815 192 835 417 952 235 778 869 823 126 202 985
   634 212 251 450 398 927 841 077 045 477 639 380 149 905 704 928 845 336 350 429 533 491 884 275
   729 600 244 910 949 576 512 963 296 301 210 074 164 435 151 636 207 272 023 255 215 860 602 243
   815 069 805 404 539 397 260 554 494 024 479 429 349 900 441 859 210 301 908 273 976 133 475 028
   276 281 420 470 497 846 759 160 199 787 686 267 776 764 695 717 961 644 817 283 959 754 504 771
   629 511 305 003 476 658 862 223 444 374 439 279 793 094 816 835 482 167 414 914 209 776 379 414
   959 380 956 350 264 554 389 833 858 656 586 926 301 698 318 193 538 206 774 671 042 439 984 125
   987 601 144 774 767 514 761 637 375 698 826 581 951 515 257 863 333 100 323 297 806 174 492 079
   270 488 349 191 404 186 283 985 132 270 069 840 724 555 469 530 022 438 143 388 281 706 143 735
   957 854 603 415 246 013 297 480 356 726 152 326 099 425 340 130 509 481 746 840 929 434 368 243
   507 481 512 615 522 879 434 067 735 001 512 407 864 487 427 170 909 723 728 106 104 871 144 399
   683 352 533 843 982 795 804 041 605 242 972 550 538 195 045 656 676 413 893 580 714 537, 1}}
```


```
FactorInteger[fi[[1, 1]]]
```

```
{{181, 1}, {373, 1}}
```

Ímé két páratlan prímtényező.

```
Solve[q^2 == 4 q - 1, q]
```

$$\left\{\left\{q \to 2 - \sqrt{3}\right\}, \left\{q \to 2 + \sqrt{3}\right\}\right\}$$